Il numero e

di
GIOVANNI BRAZZELLI

INDICE

Introduzione

L'origine di questo breve lavoro è da ricercare nella domanda che spesso ci si pone riguardo al significato e all'utilità pratica del *NUMERO E* e perché mai valga proprio 2,71828… Le informazioni che sono fornite dai libri di testo dei licei sono alquanto scarse e limitate, per non dire del tutto inesistenti. Ad esempio un libro di testo molto conosciuto, utilizzato da anni nei Licei Scientifici quale lo Zwirner – Scaglianti, afferma che " G. Napier, o Nepero, fu l'inventore dei logaritmi e rese nota tale scoperta nella sua celebre opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614), dopo un ventennio di lavoro. Nepero assunse come base dei logaritmi in numero e=2,71828….perché vi conducevano naturalmente dei problemi finanziari, relativi alla ricerca dell'interesse. La denominazione di logaritmi naturali fu introdotta da P. Mengoli (1659) nella sua *Geometria speciosa*. Fu l'inglese E. Briggs a introdurre i logaritmi decimali (1659) nell'opera *Logarithmorum chilias prima*, che conteneva i logaritmi dei primi mille numeri naturali, calcolati con l'approssimazione di 8 cifre decimali".[1]

Nessun altro dettaglio o informazione circa le modalità con cui si giunse alla determinazione di questo numero, peraltro usatissimo in matematica. Altri libri di testo di scuola superiore non riportano nemmeno le scarne informazioni citate sopra. Un po' poco per soddisfare la curiosità degli studenti. La ricerca di notizie più dettagliate è risultata comunque difficoltosa e non facile: nel lavoro che segue mi sono appoggiato molto al testo di Eli Maor "The Story of a Number: e". Le eventuali imprecisioni di linguaggio potrebbero essere dovute al fatto che, non essendo disponibili studi recenti in lingua italiana che trattano questo argomento, ho potuto consultare soltanto testi in lingua inglese, con le evidenti difficoltà di interpretazione del significato di alcuni termini.

[1] Cfr. G. Zwirner – L. Scaglianti, *L'essenza della matematica vol. 1*, Cedam, 1998.

Cos'è un numero?

Gli usi della parola "numero" sono diversi, ma possiamo identificare almeno tre diverse famiglie.

La prima è costituita dallo sviluppo del *numero* (di solito scritto al singolare), che si adatta e si generalizza continuamente per andare incontro alle esigenze sia della matematica sia delle sue applicazioni sempre più varie: i numeri naturali, lo zero, le frazioni, i numeri negativi, gli irrazionali quadratici, i numeri algebrici, i numeri trascendenti, i numeri infinitesimi e transfiniti, i numeri surreali, i numeri complessi, i quaternioni, gli ottetti.

Poi c'è lo studio speciale degli interi, l'aritmetica superiore di Gauss, o teoria dei numeri (di solito al plurale) che si sovrappone alla più recente area della combinatoria enumerativa. Insiemi o successioni speciali di numeri: numeri primi, numeri di Mersenne e di Fermat, numeri perfetti, numeri di Fibonacci e di Catalan, numeri di Eulero ed Euleriani, numeri di Bernoulli.

Infine c'è una vasta schiera di numeri speciali: π di Ludolph, e di Nepero, γ di Eulero, la costante di Feigenbaum, numeri algebrici che nascono da contesti specifici che vanno dalla diagonale di un quadrato o di un pentagono regolare fino all'esempio di grado 71, emerso da una successione apparentemente semplice del tipo "guarda e dì chi è il prossimo termine".

Durante il corso della storia, il *numero* e i *numeri* hanno avuto un'enorme influenza sulla nostra cultura e sulla nostra lingua. Migliaia di parole sono legate ai numeri in modo ovvio. Per fare alcuni esempi:

- un monolgo	è un discorso di 1 persona
- una bicicletta	ha 2 ruote
- il quadrupede	è un animale con 4 zampe
- il pentathlon	è una competizione con 5 specialità diverse.

Tuttavia in molti altri casi l'associazione è stata oscurata dal passare del tempo e da cambiamenti di significato. Ad esempio "decimare" significava originariamente punire un gruppo di soldati giustiziandone uno ogni dieci, e oggi si usa anche nel significato di dividere per dieci, o comunque ridurre considerevolmente il numero.

John Napier,[2] *1614*

Il sedicesimo e l'inizio del diciasettesimo secolo videro una grande espansione delle conoscenze scientifiche in ogni campo. La geografia, la fisica e l'astronomia, liberate finalmente dai dogmi antichi, cambiarono rapidamente la percezione dell'universo da parte degli uomini. Il sistema eliocentrico di Copernico, dopo un secolo di resistenze ed opposizione da parte della Chiesa, finalmente incominciò ad essere accettato. La circumnavigazione del globo terrestre da parte di Magellano nel 1521 aprì una nuova era nel campo delle esplorzioni marittime e permise di osservare una parte ancora sconosciuta del mondo. Nel 1569 Gerhard Mercator pubblicò la celebre nuova mappa del mondo, un evento che ha avuto un impatto notevole nelle esplorazioni successive. In Italia Galileo Galilei si stava già occupando della meccanica e in Germania Johannes Kepler formulò le sue tre leggi riguardanti il moto dei pianeti, liberando l'astronomia una volta per tutte dalla visione esclusivamente geocentrica degli antichi greci. Tutti questi sviluppi ed avvenimenti portarono ad un incremento notevolissimo del calcolo numerico, obbligando scienziati ed astronomi a passare la maggior parte dle loro tempo ad eseguire calcoli molto noiosi e non fondamentali ai fini di nuove scoperte. I tempi erano maturi per una *invenzione* che avrebbe liberato gli uomini di scienza da questo fardello inutile di lavoro. John Napier si mise alla prova cercando un metodo che potesse semplificare questa mole di calcoli.[3]

Non abbiamo informazioni certe su come Nepero si sia imbattuto nell'idea che è alla base della sua invenzione. Egli certamente aveva una notevole familiarità con la trigonometria e non c'è dubbio che avesse familiarità con la formula

$$sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)\right]$$

[2] John Napier nacque in Scozia nel 1550 ed a soli 13 anni fu iscritto alla St. Andrews University dove si appassionò alla Teologia; ma completò gli studi all'estero, forse a Parigi. Tornò in Scozia nel 1571 dove si dedicò alla cura delle proprietà della famiglia, in particolare all'agricoltura verso la quale ebbe un approccio scientifico sperimentando vari tipi di concimi. Ben presto però abbandonò la Teologia per dedicarsi a discipline scientifiche come la meccanica, in particolare la balistica, e l'astronomia. La matematica per lui fu solo un hobby, per il quale peraltro non aveva molto tempo; che sia questo il motivo per il quale si dedicò con tanto impegno a trovare un metodo per eseguire più velocemente i calcoli? Il suo lavoro fu, successivamente, perfezionato con l'aiuto di Henry Briggs. Morì nel 1617.

[3] Seeing there is nothing that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers… I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances. [John Napier, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614]

Questa formula, e quelle della stessa tipologia del tipo $cos\alpha \cdot cos\beta$ e $sin\alpha \cdot cos\beta$, erano conosciute come le formule di prostaferesi, dalla parola greca che significa "addizione e sottrazione". La loro importanza risiede nel fatto che il prodotto di due espressioni trigonometriche come ad esempio $sin\alpha \cdot sin\beta$ può essere calcolato trovando la somma o la differenza di altre espressioni trigonometriche, in questo caso $cos(\alpha - \beta)$ e $cos(\alpha + \beta)$. Dal momento che è più facile sommare e sottrarre che moltiplicare e dividere, queste formule possono essere considerate dei primitivi sistemi di riduzione da una operazione aritmetica a un'altra, più semplice della prima. E' stata probabilmente questa l'idea che ha portato Nepero alla sua *invenzione*.

Una seconda, più facile, idea che ha condotto Nepero verso la meta è connessa all'analisi dei termini di una progressione geometrica[4], cioè una sequenza di numeri con una *ragione* fissata. Se denotiamo con q la ragione di una progressione geometrica, allora, partendo con 1, i termini di una progressione sono 1, q, q^2, q^3,….q^{n-1}. Già molto tempo prima di Nepero si conosceva la semplice relazione che esiste tra i termini di una progressione geometrica e i corrispondenti esponenti, o indici, della ragione. Il matematico tedesco Michael Stifel ci dice che "se noi moltiplichiamo due termini della progressione 1, q, q^2, q^3,…. il risultato sarà quello stesso che otteniamo addizionando i corrispondenti esponenti"[5]. Per esempio $q^2 \cdot q^3 = q^5 = q^{2+3}$, risultato che può essere ottenuto addizionando gli esponenti 2 e 3. Allo stesso modo, dividendo un termine della progressione geometrica con un altro termine, ciò è equivalente a sottrarre i loro esponenti: $\frac{q^5}{q^3} = q^2 = q^{5-3}$. In maniera generale scriviamo le due semplici regole

$$q^m \cdot q^n = q^{m+n}$$

$$\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$$

[4] Si chiama *progressione geometrica* una successione di tre o più numeri, tali che il quoziente tra ciascuno di essi, e il precedente sia costante. I numeri che costituiscono una progressione geometrica si chiamano termini della progressione, e il quoziente costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama ragione della progressione geometrica e viene, di solito, indicato con la lettera *q*. Per esempio, la sequenza 1, 2, 4, 8, 16… è una progressione geometrica con q=2. [G. Zwirner – L. Scaglianti, *L'essenza della matematica vol. 1*, Cedam, 1998].

[5] Cfr. Michael Stifel, *Arithmetica integra*, 1544.

Un problema sorge, comunque, se l'esponente del denominatore è più grande di quello del numeratore, come ad esempio in $\frac{q^3}{q^5}$; la nostra regola ci darebbe $q^{3-5} = q^{-2}$, una espressione che non abbiamo definito[6]. Per superare questa difficoltà, noi semplicemente definiamo q^{-n} essere $\frac{1}{q^n}$ (in modo che $q^{3-5} = q^{-2} = \frac{1}{q^2}$, in accordo con il risultato ottenuto dividendo direttamente q^3 con q^5)[7]. Con queste definizioni nella mente, noi possiamo estendere una progressione geometrica indefinitamente in entrambe le direzioni: …q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, $q^0=1$, q^1, q^2 , q^3, …. Possiamo vedere che ogni termine è una potenza della ragione comune q, e che gli esponenti …-3, -2, -1, 0, 1 ,2, 3 ,…. formano una progressione aritmetica[8]. Questa relazione è l'idea chiave che sta dietro i logaritmi; ma mentre Stifel aveva in mente solo valori interi degli esponenti, l'idea di Nepero fu di estendere il tutto ad un insieme continuo di valori. La sua linea di pensiero era questa: se noi possiamo scrivere ogni numero positivo come una potenza di un dato fissato numero (più tardi sarà chiamato una base), allora la moltiplicazione e la divisione di numeri sarà equivalente alla addizione e sottrazione dei loro esponenti. Ad esempio cerchiamo di illustrare tale idea di lavoro scegliendo come base il numero 2. Nella tabella sottostante sono riporate le potenze di 2, incominciando da n=-3 e terminando con n=12.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Supponiamo di volere effettuare la seguente moltiplicazione: $32 \cdot 128$

Dalla tabella possiamo pensare $32 = 2^5$ e $128 = 2^7$.

[6] Esponenti negativi e frazionari erano stati suggeriti da alcuni matematici agli inizi del XIV secolo, ma la loro grande diffusione in matematica è da fare risalire a J. Wallis (1616-1703) e ancor più a I. Newton, che suggerì la moderna notazione a^{-n} e $a^{m/n}$ nel 1676.

[7] Bisogna sottolineare che per rimanere coerenti con la regola $q^m/q^n=q^{m-n}$, quando m=n, dobbiamo definire $q^0=1$.

[8] Si chiama progressione aritmetica una successione di tre o più numeri tali che la differenza tra ciascuno di essi e il precedente sia costante; i numeri che costituiscono la progressione aritmetica si chiamano termini della progressione e la differenza costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama ragione della progressione e si indica generalmente con la lettera d. [G. Zwirner – L. Scaglianti, *L'essenza della matematica vol. 1*, Cedam, 1998].

Quindi il prodotto cercato si può ottenere semplicemente sommando gli esponenti 5 e 7 ottenendo 12. Il risultato della nostra operazione sarà (da tabella per n=12) 4096.

Naturalmente, uno schema così elaborato non era necessario per effettuare semplici calcoli con i numeri interi; questo metodo aveva una sua utilità pratica solo se era utilizzabile con ogni numero, intero o fratto. Ma per riuscire a compiere questa operazione dobbiamo arrivare a rendere sempre più piccole le differenze che intercorrono tra gli elementi della tabella, cioè dobbiamo rendere la successione sempre più densa. E possiamo pensare di farlo in due modi: usando esponenti frazionari, o andando a scegliere come base un numero abbastanza piccolo così che le sue potenze possano crescere in modo ragionevolmente lento. Gli esponenti frazionari, definiti come $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ non erano ancora completamente noti ai tempi di Nepero; in questo modo non rimanevano molte altre scelte al nostro personaggio per arrivare a raggiungere il suo obiettivo. Ma quanto doveva essere piccola la base? Chiaramente se la base è troppo piccola le sue potenze crescono troppo lentamente, rendendo anche in questo caso il sistema costruito di poca utilità pratica. Sembra che un numero vicino a 1, ma non troppo vicino, sia un compromesso più che ragionevole. Dopo anni di tentativi, dubbi, ripensamenti, Napier decide per .9999999, o $1\text{-}10^{-7}$. Vediamo ad esempio nella tabella sottostante come diventa densa la successione quando n si avvicina a 1. Ma perché questa particolare scelta? La risposta sembra portare all'idea di Napier di minimizzare l'uso delle frazioni decimali. Le frazioni decimali erano state solo recentemente introdotte in Europa, e la gente di scienza ancora non aveva molto *feeling* con esse. Per minimizzare il loro uso, Napier fece sostanzialmente quello che facciamo oggigiorno quando dividiamo un euro in cento centesimi o un chilometro in mille metri: egli divise l'unità in un grande numero di sottounità, trattando ciascuna come una nuova unità. Se si sottrae dall'unità la sua 10^7 parte, otteniamo un numero vicinissimo a 1 in questo sistema, chiamato $1-10^{-7}$ oppure .9999999. Questo numero è la ragione (q) che Napier ha usato per costruire le sue tavole.

base	n=-4	n=-3	n=-2	n=-1	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
2	0,06	0,13	0,25	0,50	1	2,00	4,00	8,00	16,00	32,00	64,00	128,00
1,9	0,08	0,15	0,28	0,53	1	1,90	3,61	6,86	13,03	24,76	47,05	89,39
1,8	0,10	0,17	0,31	0,56	1	1,80	3,24	5,83	10,50	18,90	34,01	61,22
1,6	0,15	0,24	0,39	0,63	1	1,60	2,56	4,10	6,55	10,49	16,78	26,84
1,5	0,20	0,30	0,44	0,67	1	1,50	2,25	3,38	5,06	7,59	11,39	17,09
1,4	0,26	0,36	0,51	0,71	1	1,40	1,96	2,74	3,84	5,38	7,53	10,54
1,3	0,35	0,46	0,59	0,77	1	1,30	1,69	2,20	2,86	3,71	4,83	6,27
1,2	0,48	0,58	0,69	0,83	1	1,20	1,44	1,73	2,07	2,49	2,99	3,58
1,1	0,68	0,75	0,83	0,91	1	1,10	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,95
1,09	0,708	0,772	0,842	0,917	1	1,090	1,188	1,295	1,412	1,539	1,677	1,828
1,08	0,735	0,794	0,857	0,926	1	1,080	1,166	1,260	1,360	1,469	1,587	1,714
1,07	0,763	0,816	0,873	0,935	1	1,070	1,145	1,225	1,311	1,403	1,501	1,606
1,06	0,792	0,840	0,890	0,943	1	1,060	1,124	1,191	1,262	1,338	1,419	1,504
1,05	0,823	0,864	0,907	0,952	1	1,050	1,103	1,158	1,216	1,276	1,340	1,407
1,04	0,855	0,889	0,925	0,962	1	1,040	1,082	1,125	1,170	1,217	1,265	1,316
1,03	0,888	0,915	0,943	0,971	1	1,030	1,061	1,093	1,126	1,159	1,194	1,230
1,02	0,924	0,942	0,961	0,980	1	1,020	1,040	1,061	1,082	1,104	1,126	1,149
1,01	0,961	0,971	0,980	0,990	1	1,010	1,020	1,030	1,041	1,051	1,062	1,072
1,001	0,996	0,997	0,998	0,999	1	1,001	1,002	1,003	1,004	1,005	1,006	1,007
1,0001	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	1	1,0001	1,0002	1,0003	1,0004	1,0005	1,0006	1,0007
1,00001	0,99996	0,99997	0,99998	0,99999	1	1,00001	1,00002	1,00003	1,00004	1,00005	1,00006	1,00007
1,000001	0,999996	0,999997	0,999998	0,999999	1	1,000001	1,000002	1,000003	1,000004	1,000005	1,000006	1,000007
1,0000001	0,9999996	0,9999997	0,9999998	0,9999999	1	1,0000001	1,0000002	1,0000003	1,0000004	1,0000005	1,0000006	1,0000007
0,9999999	1,0000004	1,0000003	1,0000002	1,0000001	1	0,9999999	0,9999998	0,9999997	0,9999996	0,9999995	0,9999994	0,9999993
0,9999998	1,0000008	1,0000006	1,0000004	1,0000002	1	0,9999998	0,9999996	0,9999994	0,9999992	0,9999990	0,9999988	0,9999986
0,9999997	1,0000012	1,0000009	1,0000006	1,0000003	1	0,9999997	0,9999994	0,9999991	0,9999988	0,9999985	0,9999982	0,9999979

Napier ha impiegato circa 20 anni della sua vita (1594-1614) per cercare *la base* più adatta e poi per costruire le sue tavole. La sua tabella iniziale conteneva 101 entrate, incominciando con $10^7 = 10.000.000$ seguito da $10^7 \cdot (1-10^{-7}) = 9.999.999$, poi da $10^7 \cdot (1-10^{-7})^2 = 9.999.998$ e così via fino a $10^7 \cdot (1-10^{-7})^{100} = 9.999.900$ in cui ogni termine era ottenuto dal precedente sottraendo la sua 10^7 parte. Egli poi ha ripetuto l'intero processo, cominciando ancora una volta con il termine 10^7 ma questa volta usando come *ragione* il rapporto fra l'ultimo elemento della prima tabella e il primo elemento della tabella originaria, cioè $9.999.900 \div 10.000.000 = .99999 = 1-10^{-5}$. Questa seconda tavola conteneva 51 ingressi, l'ultimo essendo $10^7 \cdot (1-10^{-5})^{50} = 9.995.001$. Costruì infine una terza tavola con 21 ingressi usando la *ragione* $9.995.001 \div 10.000.000$; l'ultimo termine di questa tavola era $10^7 \cdot (0.9995)^{20}$ o approssimativamente $9.900.473$. Infine, da ogni termine presente in quest'ultima tavola, Napier creò 68 termini addizionali, usando la ragione $9.900.473 \div 10.000.000$, numero molto vicino a 0.99. L'ultimo numero presente in uscita risultava essere $9.900.473 \cdot (0.99)^{63}$, numero molto vicino a $4.998.609$ (all'incirca la metà del numero originale di partenza).

Completato questo monumentale lavoro, a Napier non rimaneva altro che "battezzare" la sua creazione. All'inizio chiamò l'esponente di ogni potenza *numero artificiale* ma più tardi decise per il termine *logaritmo*, parola che significa "numero della ragione".

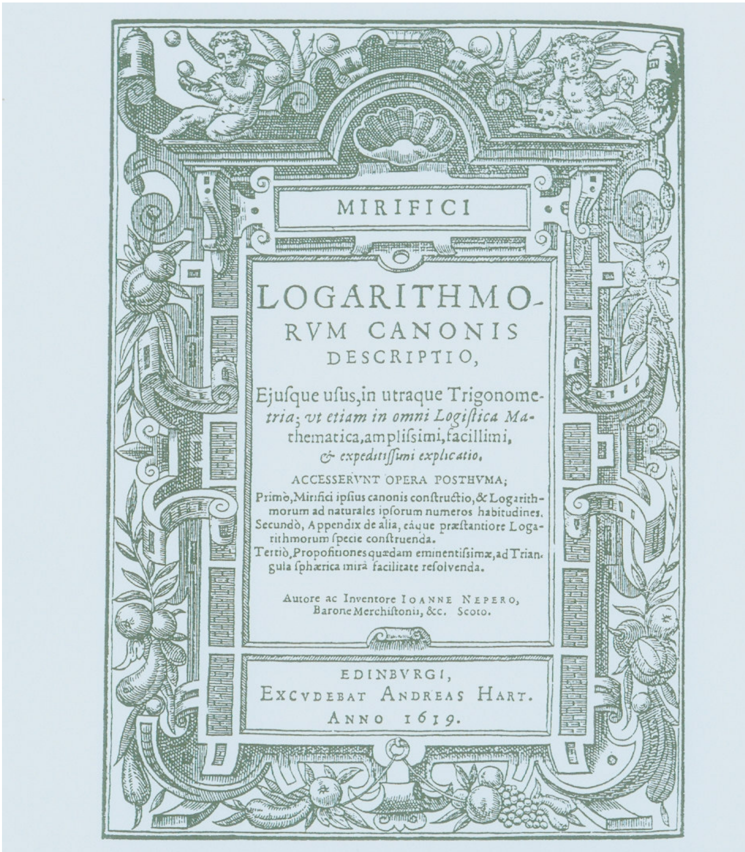
Nella notazione moderna questo equivale a dire che se (nella prima tabella) $N = 10^7 \cdot (1-10^{-7})^L$, allora l'esponente L è il logaritmo (neperiano o naturale) di N.

Come si vede la definizione di logaritmo di Nepero differisce profondamente dalla definizione moderna (introdotta nel 1728 da Eulero): se $N = b^L$ dove b è un fissato numero positivo diverso da 1, allora $L = log_b N$. Quindi nel sistema di Nepero L=0 corrisponde a N=10^7 (ed è $log_{Nepero} 10^7 = 0$) mentre nella notazione utilizzata attualmente L=0 corrisponde a N=1 (perché $log_b 1 = 0$). Fatto ancora più significativo è che le regole base di operazioni con i logaritmi (per esempio che il logaritmo del prodotto di due termini è equivalente alla somma dei logaritmi di ogni singolo termine) non valgono con la definizione di Nepero. E da ultimo, siccome 1-10^{-7} è più piccolo di 1, i logaritmi di Nepero decrescono con il crescere dei numeri, mentre i nostri comuni logaritmi (base 10) crescono.

Queste differenze sono relativamente di poco conto, comunque, e sono solamente la conseguenza dell'insistenza di Nepero sul fatto che l'unità dovesse essere uguale a 10^7 sottounità. Se avesse deciso di utilizzare le frazioni decimali, la sua definizione di logaritmo sarebbe stata più semplice e più vicina a quella odierna. Ma facendo ciò, Nepero divenne inconsapevolmente il padre di quel numero che, un secolo più tardi, sarebbe stato riconosciuto come la base universale dei logaritmi e che avrebbe giocato un ruolo fondamentale nella storia della matematica, forse secondo solo al numero π. Questo numero *e* è il limite di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \to \infty$. In realtà Nepero si avvicinò a scoprire il numero $1/e$, definito come $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Come abbiamo visto, la sua definizione di logaritmo è equivalente alla equazione $N = 10^7 \cdot \left(1-10^{-7}\right)^L$. Se dividiamo sia N sia L per 10^7 (ciò equivale a riscalare le nostre variabili), l'equazione diventa $N^* = 10^7 \cdot \left(1-10^{-7}\right)^{L^*}$, dove $N^* = \frac{N}{10^7}$ e $L^* = \frac{L}{10^7}$. Ora dato che $\left(1-10^{-7}\right)^{10^7} = \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ è molto vicino a $\frac{1}{e}$, i logaritmi di Nepero sono virtualmente logaritmi in base $\frac{1}{e}$. La dicitura secondo cui Napier arrivò a scoprire questa base (o *la base equivalente e*) è come detto sbagliata in quanto egli non pensava in termini di una base, concetto che è stato sviluppato solo con l'introduzione dei logaritmi comuni (di base 10).

Osservazioni storiche

Napier pubblicò la sua invenzione nel 1614 nel libro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (figura 1). Più tardi, dopo la sua morte, suo fratello decise di pubblicare il *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619).


MIRIFICI

LOGARITHMO-
RVM CANONIS
DESCRIPTIO,

Ejuſque uſus, in utraque Trigonometria; *ut etiam in omni Logiſtica Mathematica*, ampliſsimi, facillimi, *& expeditiſſimi explicatio*.

ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;

Primò, Mirifici ipſius canonis conſtructio, & Logarithmorum ad naturales ipſorum numeros habitudines.
Secundò, Appendix de alia, eâque præſtantiore Logarithmorum ſpecie conſtruenda.
Tertiò, Propoſitiones quædam eminentiſsimæ, ad Triangula ſphærica mirâ facilitate reſolvenda.

Autore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchiſtonii, &c. Scoto.

EDINBVRGI,
EXCVDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

FIGURA 1.

Raramente nella storia della scienza una invenzione fu accolta con maggiore interesse ed entusiasmo dall'intero mondo scientifico. Uno dei primi scienziati ad utilizzare i logaritmi fu l'astronomo Johannes Kepler, che li utilizzò con grande successo nei calcoli delle orbite dei pianeti intorno al Sole.[9]

[9] The miraculous powers of modern calculation are due to three inventions: the Arabic Notation, Decimal Fractions, and Logarithms. [Florian Cajori, *A History of Mathematics*, 1893]

Henry Briggs[10] fu talmente impressionato da tale scoperta che decise di andare in Scozia per incontrare lo stesso Napier di persona. All'incontro Briggs propose due modifiche che avrebbero reso le tavole di Napier ancora più efficienti: fare in modo che si avesse $log\,1 = 0$ (nelle tavole neperiane era, come detto, $log\,10^7 = 0$) e fare sì che il logaritmo di 10 fosse uguale ad una appropriata potenza di 10. Dopo aver analizzato varie possibilità essi decisero infine per $log\,10 = 1 = 10^0$. Nel linguaggio moderno questo corrisponde a dire che se un numero positivo N è scritto come $N = 10^L$, allora $L = log_{10} N$ dove log_{10} è detto logaritmo di Briggs.

Napier accettò le osservazioni e i suggerimenti di Briggs, ma era già in età avanzata, le forze incominciavano a mancargli e non poteva ricalcolare tutte le sue tavole. Ci pensò Briggs nel 1624 sotto il titolo *Arithmetica logarithmica*. Le sue tavole davano i logaritmi di base 10 per tutti i numeri interi dall'1 al 20000 e dal 90000 al 100000 con una accuratezza fino alla quattordicesima cifra decimale. Il gap da 20000 al 90000 fu più tardi riempito da Adriaan Vlacq, un editore olandese; queste tavole aggiuntive furono allegate alla seconda edizione della *Arithmetica logarithmica* (1628). Con piccole revisioni, questo lavoro resta la base per tutte le tavole dei logaritmi usate fino ai giorni nostri.

Un'altra persona che avrebbe potuto fregiarsi del titolo di "inventore dei logaritmi" fu Joost Bürgi (1552-1632), un orologiaio svizzero che costruì una serie di tavole sullo stesso schema di quelle di Napier, ma con una significativa differenza: mentre Napier ha usato la ragione $1\text{-}10^{-7}$, che è un numero vicino a 1 ma più piccolo di 1, Bürgi usò $1+10^{+4}$, un numero significativamente più grande di 1. Quindi i logaritmi di Bürgi crescono con il crescere dei numeri, mentre quelli di Napier decrescono al crescere dei numeri.

Bürgi arrivò alla sua invenzione al più tardi nel 1588, ben 6 anni prima che Napier incominciasse il suo lavoro, ma per alcune ragioni egli non pubblicò nulla fino al 1620, quando le sue tavole furono pubblicate in maniera anonima a Praga. Nell'ambiente scientifico vale la regola "pubblica o muori": ritardando la pubblicazione, Bürgi perse la priorità e perse il diritto di essere ricordato come "il vero padre dei logaritmi" quale in realtà egli fu. Basta infatti ricordare che oggi, ad eccezione degli studiosi della storia della matematica, il suo nome è completamente sconosciuto ai più. Come Napier, anche Bürgi era interessato

[10] Henry Briggs (1561 – 1631) era professore di geometria al Gresham College di Londra negli anni della scoperta di Napier.

ad evitare l'introduzione delle frazioni decimali; la definizione di logaritmo da lui data era più complessa e complicata del necessario. Se un numero intero positivo N è scritto come $N = 10^8 \cdot (1 + 10^{-4})^L$, allora Bürgi chiamò il numero 10 L (piuttosto di L) il *numero rosso* corrispondente al *numero nero* N (in queste tavole questi numeri sono stampati in rosso e in nero, da cui la relativa nomenclatura). Egli mise i numeri rossi (i logaritmi) nel margine della pagina e i numeri neri nel centro della pagina, costruendo in tal modo una tavola di antilogaritmi.

L'uso dei logaritmi si diffuse rapidamente in tutta Europa e non solo: le tavole furono ristampate a Pechino nel 1713. Sebbene oggi i logaritmi abbiano perso il loro ruolo centrale nel calcolo numerico grazie allo sviluppo dei moderni calcolatori, la funzione logaritmica rimane centrale in quasi tutte le branche della matematica, pura o applicata.

Calcolo del $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *per* $n \to \infty$

Consideriamo la successione il cui valore generale è

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n = 1,2,3,...$$

cioè la successione

$$\left\{2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, ..., \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, ...\right\}$$

e dimostriamo che essa converge, per $n \to \infty$, ad un limite finito. Questo limite si designa con la lettera *e*.

Per effettuare il calcolo del limite di $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, è comodo utilizzare le formule binomiali.

Un binomio è una espressione che consiste nella somma di 2 termini; possiamo ad esempio scrivere l'espressione $a + b$. Il calcolo delle potenze del binomio è semplice:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

E' facile individuare la regola generale: l'espressione $(a+b)^n$ consiste di $n+1$ termini, ognuno della forma $a^{n-k}b^k$, dove $k = 0,1,2,3,\ldots n$. I coefficienti di ciascun termine si trovano con il noto schema del *triangolo di Pascal*. Se chiamiamo i coefficienti del termine $a^{n-k}b^k$ con ${}^nC_k$, allora

$$^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il simbolo n! denota il prodotto $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n$. Se ad esempio applichiamo queste formule per il calcolo di $(a+b)^4$, otteniamo i coefficienti

$$^4C_0 = \frac{4!}{0!\cdot 4!} = 1 \qquad {}^4C_1 = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 4 \qquad {}^4C_2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

$$^4C_3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4 \qquad {}^4C_4 = \frac{4!}{4!\cdot 0!} = 1$$

che sono esattamente gli stessi numeri che troviamo nella quinta riga del triangolo di Pascal. Ritornando al caso generale, calcoliamo ${}^nC_k$:

$^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, da cui si ricava

$k=0 \qquad {}^nC_0 = 1$

$k=1 \qquad {}^nC_1 = n$

$k=2 \qquad {}^nC_2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2!}$

$k=3 \qquad {}^nC_3 = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-3)}{3!}$

$k=n \qquad {}^nC_n = \frac{n!}{n!} = 1$

Ora applichiamo la formula binomiale $(a+b)^n$ nel caso in cui $a=1$ e $b=\frac{1}{n}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+......+1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Si ottiene:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+.....+\frac{1}{n^n} \qquad (1)$$

Ne segue

$a_n < a_{n+1}$

perché in a_{n+1} compaiono *n+1* addendi positivi, dei quali i primi *n* sono ordinatamente maggiori o eguali agli *n* addendi la cui somma vale a_n.

Poiché la successione $\{a_n\}$ è crescente, si deduce che il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

esiste: può essere finito o valere $+\infty$. Per provare che è finito basterà dimostrare che la successione è limitata superiormente.

Ora si ha, per la (1), se è $n\geq 3$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^{n-3}}\right) \qquad (2)$$

La somma della progressione geometrica fra parentesi, di ragione $\frac{1}{4}$, vale[11]

$$1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{n-3}}=\frac{1-\frac{1}{4^{n-2}}}{1-\frac{1}{4}}<\frac{4}{3}$$

ed è, per $n\geq 3$,

[11] Sia $S_n=1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n$ una progressione geometrica, di ragione $q\neq 1$. Si ha $qS_n=q+q^2+...+q^n+q^{n+1}$ e quindi, sottraendo membro a membro,

$(1-q)S_n=1-q^{n+1} \quad \rightarrow \quad S_n=\left(1-q^{n+1}\right)/(1-q)$

$$a_n > a_2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

Segue dalla (1) e (2) la limitazione

$$2.25 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2.5 + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3} < 2.75 \qquad\qquad n \geq 3$$

Siccome la successione $\{a_n\}$ risulta limitata superiormente ed è monotona, essa converge ad un limite finito; indicandolo con la lettera *e* risulta perciò

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ed è inoltre

$$e = \sup_{\{n\}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Ne segue

$$2.25 < e \leq 2.75$$

Si può dimostare che il numero *e* è irrazionale: il suo valore approssimato, con 15 decimali, è il seguente:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \text{ cioè}$$

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \ldots = 2.718281828459045\ldots$$

Però non tutti i numeri irrazionali sono algebrici. Infatti un numero si dice algebrico se può essere espresso come radice di una equazione algebrica (cioè polinomiale) a coefficienti interi del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Un numero può essere irrazionale (come ad esempio *e*) e nel contempo continuare ad essere algebrico; ad esempio $\sqrt{2}$, numero irrazionale, può essere visto come soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$. Nel 1840 Joseph dimostrò che esistono effettivamente numeri non algebrici, chiamati numeri trascendenti. La trascendenza di *e* fu provata da Charles Hermite nel 1873; la dimostrazione fu successivamente semplificata da vari matematici, tra cui David Hilbert. Si tratta di una dimostrazione per assurdo[12], che si basa su semplici argomenti di calcolo differenziale: si costruisce un opportuno integrale definito, dipendente da un numero primo *p*, e poi si fa vedere che, da una parte questo integrale assume valori interi positivi per ogni p fissato, dall'altra tende a 0 al crescere di *p*, il che è palesemente in contraddizione. La dimostrazione di Hermite non fece altro che riproporre il problema se anche il numero π fosse o meno trascendente. Solo nel 1882 Ferdinand Von Lindemann riuscì a dimostrare che anche π è un numero trascendente. In particolare Hermite dimostrò che non esiste una equazione del tipo

$$ae^n + be^m + ce^p + \ldots = 0$$

dove i coefficienti *a*, *b*, *c*, .. e gli esponenti *n*, *m*, *p*, …sono numeri razionali; Lindemann dimostrò il teorema in forma più generale aggiungendo che *a*, *b*, *c*, …e *n*, *m*, *p*, …non potrebbero essere neppure numeri algebrici.

Alcuni numeri curiosi legati al numero e

- $e^{-e} = 0.065988036....$

Leonhard Eulero provò che l'espressione $x^{x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, quando il numero degli esponenti cresce all'infinito, tende ad un limite se *x* è compreso fra $e^{-e}(= 1/e)$ ed $e^{1/e}$.[13]

- $1/e = 0.367879441....$

E' il $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Questo numero è usato per misurare il tempo di decadimento della funzione esponenziale $y = e^{-at}$. Quando $t = 1/a$ si trova $y = e^{-1} = 1/e$

[12] Per la dimostrazione si veda Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman & Hall Mathematics, 1989
[13] Cfr. David Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, 1986.

♦ $e^{-\pi/2} = 0.207879576....$

Come Eulero mostrò nel 1746, l'espressione i^i ha una infinità di valori, tutti reali: $i^i = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$ dove $k = 0,\pm1,\pm2,....$. Il primo valore di questi (per $k = 0$) è $e^{-\pi/2}$.

♦ $e^{1/e} = 1.44667861....$

E' la soluzione del problema di Steiner: trovare il massimo valore della funzione $y = x^{1/x} = \sqrt[x]{x}$. Questo valore si ottiene quando $x = e$ e vale appunto $\boldsymbol{e}^{1/e}$

♦ $\dfrac{878}{323} = 2.718266254....$

E' la più vicina approssimazione razionale del numero *e* usando degli interi più piccoli di 1000. E' facile da memorizzare e ricorda l'approssimazione razionale $355/113 = 3.14159292....$ per π.

♦ $e = 2.718281828....$

Come detto è la base dei logaritmi naturali e il limite di $(1+1/n)^n$ quando $n \to \infty$. L'irrazionalità di *e* fu provata nel 1737 da Eulero; Charles Hermite nel 1873 ha dimostrato che *e* è un numero trascendente, cioè che non può essere la soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti interi.

Il numero *e* può essere interpretato geometricamente in molti modi. Ad esempio l'area sotto il grafico di $y = e^x$ da $x = -\infty$ a $x = 1$ è esattamente uguale a *e*; inoltre l'area sotto l'iperbole equilatera $y = 1/x$ da $x = 1$ a $x = e$ è uguale a 1.

♦ $e + \pi = 5.859874482....$

$e \cdot \pi = 8.539734223....$

Questi numeri molto raramente appaiono in applicazioni; non è noto se siano numeri algebrici o trascendenti.

♦ $e^e = 15.15426224....$

Non è ancora noto se tale numero è algebrico o trascendente.

♦ $\pi^e = 22.45915772....$

Non è ancora noto se tale numero è algebrico o trascendente.

♦ $e^\pi = 23.14069263....$

Alexandr Gelfond nel 1934 è riuscito a dimostrare che è un numero trascendente.

♦ $e^{e^e} = 3814279.104....$

Si può notare di quanto tale numero sia più grande di e^e. Il numero successivo in questa progressione, $e^{e^{e^e}}$, ha 1656521 numeri nella sua parte intera.

La formula di Eulero: $e^{i\pi} + 1 = 0$

La formula di Eulero[14], una delle più famose di tutta la matematica, connette 5 costanti fondamentali della matematica: 0, 1, *e*, π, *i*. Eulero[15] fu colui che introdusse per la prima volta la moderna notazione *f(x)* per una funzione e la usò per tutti i tipi di funzioni, sia implicite che esplicite. Nell'*Introduction* Eulero per la prima volta richiama l'attenzione sul ruolo centrale del numero *e* e della funzione e^x in analisi. Come già detto, fino ai tempi di Eulero, la funzione esponenziale era definita solamente come l'inversa della funzione logaritmica. Eulero, invece, mette le due funzioni sullo stesso piano, dando definizioni indipendenti:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n \qquad (3)$$

[14] It appeals equally to the mystic, the scientist, the philosopher, the mathematician. [Edward Kasner e James Newman, *Mathematics and the Immagination*, 1940]
[15] Leonhard Euler nacque a Basilea nel 1707 e nel 1727 si trasferì alla Accademia di San Pietroburgo. La sua produzione letteraria è davvero immensa ed è stimata in più di 90 opere che coprono quasi tutto lo scibile scientifico; il lavoro più importante e famoso di Eulero è *The introduction in analysis infinitorum*, pubblicato nel 1748.

$$ln\ x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n} - 1\right)$$

Eulero aveva già utilizzato la lettera *e* per indicare il numero $2.71828...$ in uno dei suoi primi lavori, un manoscritto intitolato *Meditation upon Experiments made recently on the firing of Cannon*, scritto nel 1727. Eulero lo definisce come "quel numero il cui logaritmo iperbolico vale 1". La prima apparizione del numero *e* in un lavoro pubblicato fu nel *Meccanica* (1736) di Eulero; probabilmente Eulero scelse la lettera *e* in quanto prima lettera della parola *esponenziale*. Oppure, con tutta probabilità, perché la lettera *e* era la prima lettera "libera" (o poco usata) in matematica: le lettere *a*, *b*, *c*, *d* erano già usatissime nelle scienze matematiche. Invece sembra alquanto inverosimile che abbia scelto la lettera *e* in quanto iniziale del suo nome, come è stato anche suggerito da qualche storico: il personaggio Eulero era una persona alquanto schiva e poco propensa ad apparire, quindi difficilmente avrebbe potuto usare questo espediente per farsi pubblicità.

Eulero usa la sua definizione di funzione esponenziale per svilupparla in serie infinita di potenze. Sostituendo $x = 1$ nella (3) otteniamo la serie numerica

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \qquad (4)$$

Se poi ripetiamo il tutto sostituendo x/n a $1/n$ otteniamo la serie infinita

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \qquad (5)$$

che rappresenta lo sviluppo in serie di potenze per e^x.

Eulero arriva a dimostrare che ogni numero razionale può essere scritto come una frazione continua finita, mentre un numero irrazionale è rappresentato da una frazione continua che non ha mai fine. Usando la (4) come punto di partenza, Eulero arriva a scrivere

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + ...}}}}}$$

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Queste due espressioni sorprendono per la regolarità di costruzione, in netto contrasto con la distribuzione casuale delle cifre decimali nei numeri irrazionali.

Eulero era un grande *sperimentatore* matematico: egli prese l'equazione (5), lo sviluppo in serie di e^x, e rimpiazzò la variabile reale *x* con la variabile immaginaria *ix*. La (5) diventa

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots$$

Facendo i conti possiamo anche riscrivere

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (6)$$

Eulero ora decide di cambiare l'ordine di scrittura, separando tutti i termini reali da quelli immaginari. Questa operazione può essere pericolosa: mentre nelle somme finite si può cambiare l'ordine dei termini senza conseguenze sulla somma, fare ciò in una serie infinita può cambiare la serie da convergente a divergente. Ma ai tempi di Eulero questo non era completamente noto e così egli non se ne preoccupò più di tanto. Cambiando l'ordine nella (6) si ottiene

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

Era noto che le due serie che compaiono tra parentesi sono lo sviluppo in serie delle funzioni goniometriche $cos\ x$ e $sin\ x$, rispettivamente. Allora Eulero arriva a scrivere

$$e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x \qquad (7)$$

La scoperta di una relazione tra funzione esponenziale e funzioni goniometriche ha di fatto reso inevitabile l'emergere inaspettato di altre relazioni. Ponendo $x = \pi$ nella relazione (7) e ricordando che $cos\ \pi = -1$ e $sin\ \pi = 0$ si ottiene

$$e^{i\pi} = -1$$

Se riscriviamo l'equazione come $e^{i\pi}+1=0$, otteniamo una formula che lega le 5 più importanti costanti della matematica (ed anche le 3 più importanti operazioni matematiche, addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza). Queste 5 costanti simboleggiano le quattro maggiori branche delle scienze matematiche: l'aritmetica, rappresentata dallo 0 e dall'1; l'algebra, rappresentata dal numero *i*; la geometria, da π; e l'analisi, rappresentata dal numero *e*.

BIBLIOGRAFIA

Libri

Amerio L., *Analisi Matematica con elementi di analisi funzionale (vol. 1)*, UTET, Torino, 1986

Conway J. H. – Guy R. K., *Il libro dei Numeri*, Hoepli, Milano, 1999

Goldman J. R., *The Queen of Mathematics: a Historically Motivated Guide to a Number Theory*, A K Peters, Wellesley Massachusetts,1998

Maor E., *The Story of a Number: e*, Princeton University, New Jersey, 1994

Siti Internet

www.matematicamente.it/storia/nepero_eulero.htm